「解答例」

選抜区分	2020 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　（科目名：数学）

問題 1

(1) 元金を c とすると, 条件より

$$c \times (1+0.1)^4 = 292820$$

であるから,

$$c = \frac{292820}{1.1^4} = 200000$$

最初に預けた元金は 200000 である. $\cdots$（答）

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = a$, 公差 d の等差数列なので,
$a_n = a + (n-1)d$ である. $\cdots$（答）

(3) S_{n+1} は n 年目の預金 S_n の $1+r$ 倍と $n+1$ 年目の収益 a_{n+1} の和なので,
$S_{n+1} = (1+r)S_n + a_{n+1}$ である. $\cdots$（答）

(4) (3) より

$$\begin{cases} S_{n+2} &= (1+r)S_{n+1} + a_{n+2} \quad \cdots (a) \\ S_{n+1} &= (1+r)S_n + a_{n+1} \quad \cdots (b) \end{cases}$$

式を辺々引き $(a)-(b)$ を考えて,

$$S_{n+2} - S_{n+1} = (1+r)(S_{n+1} - S_n) + a_{n+2} - a_{n+1}$$

(2) より $a_{n+2} - a_{n+1} = d = a$ なので

$$T_{n+1} = (1+r)T_n + a$$

この漸化式は

$$T_{n+1} + \frac{a}{r} = (1+r)\left(T_n + \frac{a}{r}\right)$$

となるので, 数列 $\{T_n + \frac{a}{r}\}$ は, 初項

$$\begin{aligned} T_1 + \frac{a}{r} &= S_2 - S_1 + \frac{a}{r} \\ &= (1+r)a_1 + a_2 - a_1 + \frac{a}{r} \\ &= (1+r)a + (a+a) - a + \frac{a}{r} \\ &= (1+r)a + a + \frac{a}{r} \\ &= (1+r)^2 \cdot \frac{a}{r} \end{aligned}$$

公比 $1+r$ の等比数列となるので,

$$T_n + \frac{a}{r} = \left((1+r)^2 \cdot \frac{a}{r}\right)(1+r)^{n-1} = \frac{a((1+r)^{n+1} - 1)}{r}.$$

よって, $\{T_n\}$ の一般項は $T_n = \dfrac{a((1+r)^{n+1}-1)}{r}$ である. $\cdots$（答）

(5) 数列 $\{S_n\}$ の階差数列は $\{T_n\}$ なので, $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1}\left((1+r)^{k+1}\cdot\frac{a}{r} - \frac{a}{r}\right) \\ &= a + \frac{(1+r)^2((1+r)^{n-1}-1)}{1+r-1}\cdot\frac{a}{r} - \frac{a}{r}(n-1) \\ &= a + \frac{a((1+r)^{n+1}-(1+r)^2)}{r^2} - \frac{a(n-1)}{r} \end{aligned}$$

また, $n=1$ のとき

$$S_1 = a + \frac{a((1+r)^{1+1}-(1+r)^2)}{r^2} - \frac{a(1-1)}{r} = a = a_1$$

となり, この式は条件を満たすので, 数列 $\{S_n\}$ の一般項は
$S_n = a + \dfrac{a((1+r)^{n+1}-(1+r)^2)}{r^2} - \dfrac{a(n-1)}{r}$ である. $\cdots$ (答)

問題2

(1) 放物線 C の式 $y = x^2 + 2$ より $y' = 2x$ であるから, 点 $\mathrm{T}(t, t^2+2)$ での接線 l の式は,

$$y = 2t(x-t) + t^2 + 2$$

よって, 直線 l の式は $y = 2tx - t^2 + 2$ である. $\cdots$ (答)

(2) 線分 AQ の長さは, $\mathrm{A}(0,2)$ と直線 l: $2tx - y - t^2 + 2 = 0$ の距離であるから,

$$\mathrm{AQ} = \frac{|2t\cdot 0 - 2 - t^2 + 2|}{\sqrt{(2t)^2 + (-1)^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{4t^2+1}}$$

よって, AQ$= \dfrac{t^2}{\sqrt{4t^2+1}}$ である. $\cdots$ (答)

(3) 面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t (x^2 + 2 - (2tx - t^2 + 2))\,dx \\ &= \int_0^t (x^2 - 2tx + t^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - tx^2 + t^2x\right]_0^t \\ &= \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

よって, 求める面積は $S_1 = \dfrac{t^3}{3}$ である. $\cdots$ (答)

(4) 三角形 APQ の面積を求める. 直線 l : $y = 2tx - t^2 + 2$ と y 軸との交点は, $\mathrm{P}(0, -t^2+2)$ である. また, 直線 m は直線 l と直交し点 A を通るので, 直線 m の式は

$$y = -\frac{1}{2t}x + 2$$

さらに, 点 Q は 2 直線 l と m の交点だから,

$$\begin{cases} y = 2tx - t^2 + 2 \\ y = -\frac{1}{2t}x + 2 \end{cases}$$

の解である．これを解いて点 Q の x 座標は $x=\frac{2t^3}{4t^2+1}$．したがって，

$$\text{三角形 APQ}=\frac{1}{2}\times \mathrm{AP}\times\frac{2t^3}{4t^2+1}=\frac{1}{2}\times(2-(-t^2+2))\times\frac{2t^3}{4t^2+1}=\frac{t^5}{4t^2+1}$$

条件より $S_1=$ 三角形 APQ $\times 2$ なので, (3) から

$$\frac{t^3}{3}=\frac{t^5}{4t^2+1}\times 2$$

$t\neq 0$ より

$$\frac{1}{3}=\frac{t^2}{4t^2+1}\times 2$$

これを解くと, $t^2=\frac{1}{2}$ であり, $t>0$ より $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ である．

よって, 求める t の値は $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．$\cdots$ (答)

(5) 放物線 C と直線 m の交点は

$$\begin{cases} y=x^2+2 \\ y=-\frac{1}{2t}x+2 \end{cases}$$

これを解いて $x=0,-\frac{1}{2t}$ でり, 点 R は点 A 以外の点だから, 点 R の x 座標は $-\frac{1}{2t}$ である．したがって

$$\text{三角形 ARP}=\frac{1}{2}\times \mathrm{AP}\times\frac{1}{2t}=\frac{1}{2}\times(2-(-t^2+2))\times\frac{1}{2t}=\frac{t}{4}$$

これと (3) より $S_2-S_1=\frac{t}{4}-\frac{t^3}{3}$ である．題意より $f(t)=\frac{t}{4}-\frac{t^3}{3}$ とおき,

$\frac{1}{3}\leqq t\leqq\frac{2}{3}$ における $f(t)$ の最大値と最小値を求める．

$f'(t)=\frac{1}{4}-t^2=0$ とすると, $t>0$ より $t=\frac{1}{2}$ である．また, $f(\frac{1}{3})=\frac{23}{324}$, $f(\frac{2}{3})=\frac{11}{162}$ であるから, 増減表は次のようになる．

t	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{23}{324}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{11}{162}$

$\frac{23}{324}>\frac{11}{162}$ だから, 増減表より

$t=\frac{1}{2}$ のとき 最大値 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{12}$, $t=\frac{2}{3}$ のとき 最小値 $f(\frac{2}{3})=\frac{11}{162}$ である．$\cdots$ (答)

問題3

(1) 原点 O を通る直線が円 C_2 と点 E で接するとするとき, 直角三角形 AEO について, $\mathrm{OA}=2$, $\mathrm{AE}=1$, $\angle\mathrm{AEO}=90^\circ$ なので, $\angle\mathrm{AOE}=30^\circ$ である．点 P と点 Q は第 1 象限の異なる点であるから, $0^\circ<\theta<30^\circ$ である．$\cdots$ (答)
(解答は弧度法を用いた表現 $0<\theta<\pi/6$ でも正解である)

(2) 点 A から辺 OC への垂線を AD とする．ABCD は長方形で, 直角三角形 OAD は OA$=2$, OD $=\mathrm{OC}-\mathrm{DC}=\mathrm{OC}-\mathrm{AB}=1$ なので $\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=\sqrt{3}$ である．
よって, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ である．$\cdots$ (答)

(3) 2 点 P, Q は直線 m と円 C_2 の異なる交点なので それらの座標は

$$\begin{cases} y=x\tan\theta \\ (x-2)^2+y^2=1 \end{cases}$$

の解である．したがって

$$(x-2)^2+x^2\tan^2\theta=1$$

$$x^2(1+\tan^2\theta)-4x+3=0$$

$0<\theta<30^\circ$ なので, $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}>0$ から

$$x^2-(4\cos^2\theta)x+3\cos^2\theta=0$$

$$x=2\cos^2\theta\pm\sqrt{4\cos^4\theta-3\cos^2\theta}=2\cos^2\theta\pm\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta-3} \qquad (a)$$

この2つの解を $x_1, x_2\,(x_1<x_2)$ とおくと,

$$\mathrm{PQ}=(x_2-x_1)\times\frac{1}{\cos\theta}=2\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta-3}\times\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{4\cos^2\theta-3}$$

よって, $\mathrm{PQ}=2\sqrt{4\cos^2\theta-3}$ である. $\cdots$ (答)
(解答は $\mathrm{PQ}=2\sqrt{1-4\sin^2\theta}$ でも正解である)

(4) (3) の式 (a) より 点 R の x 座標は $\frac{x_1+x_2}{2}=2\cos^2\theta$, y 座標は $2\cos^2\theta\times\tan\theta=2\sin\theta\cos\theta$ である.
よって, 点 R の座標は $(2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta)=(\cos2\theta+1, \sin2\theta)$ である. $\cdots$ (答)
三角形 APQ は二等辺三角形で PR=QR であるから, $\angle\mathrm{ARQ}=90^\circ$ である. 三角形 ARO について, $\angle\mathrm{ARO}=\angle\mathrm{ARQ}=90^\circ$ なので, 点 R の軌跡は,$(1,0)$ を中心に半径 1 の円周上で C_2 の内部である. よって,
求める軌跡は 円 $(x-1)^2+y^2=1$ の $\frac{3}{2}<x<2,\ y>0$ の範囲である.$\cdots$ (答)

(5) (2) から直線 AB の傾きは直線 OC の傾きと同じ $\tan60^\circ$ で AB$=1$ より, 点 B の座標は $(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ である. この点 B と点 $\mathrm{R}(2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta)$ の距離は

$$\begin{aligned}\mathrm{BR}&=\sqrt{\left(\cos2\theta+1-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\sin2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta+3-3\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta}\\&=\sqrt{4-3\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta}\\&=\sqrt{4-2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)}\\&=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin(2\theta+60^\circ)}\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<30^\circ$ より, $2\theta+60^\circ=90^\circ$ つまり $\theta=15^\circ$ のとき BR は最小値 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ となる.
よって, BR の最小値は $\sqrt{3}-1$ である. ($\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ も正解とする) $\cdots$ (答)

(別解) 点 $\mathrm{F}(1,0)$ とおくと, (4) より 点 R は点 F を中心とする半径 1 の円周上にあり, FR $=1$ である. また, 線分 FR の長さと線分 RB の長さの和が最小となるのは 点 R が線分 FB 上にあるときである. $\mathrm{B}(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathrm{F}(1,0)$ なので, 線分 BR の長さは

$$\mathrm{BR}=\mathrm{BF}-\mathrm{FR}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-1=\sqrt{3}-1$$

よって, 最小値は $\mathrm{BR}=\sqrt{3}-1$ である. $\cdots$ (答)

問題4

(1) A 社に申し込み当選しない確率を余事象の確率で求めると,

$$P_A(\bar{T})=1-P_A(T)=1-0.4=0.6=\frac{3}{5}\cdots(答)$$

(2) A 社と B 社に申し込み，A 社は当選し B 社は当選しない確率は

$$P_A(T) \cdot P_B(\bar{T}) = 0.4 \times (1-0.3) = 0.28 = \frac{7}{25} \cdots (\text{答})$$

(3) 3 社すべてに申し込み，少なくとも 1 社に当選する確率を余事象の確率で求めると，

$$\begin{aligned} & 1 - P_A(\bar{T}) \cdot P_B(\bar{T}) \cdot P_C(\bar{T}) \\ = \ & 1 - (1-0.4) \times (1-0.3) \times (1-0.2) \\ = \ & 0.664 = \frac{83}{125} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) 4 人で A 社に申し込んだとき，その内いずれか 2 人が当選する確率は

$$\begin{aligned} & {}_4C_2 P_A(T)^2 P_A(\bar{T})^{4-2} \\ = \ & \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 0.4^2 \times (1-0.4)^2 \\ = \ & 0.3456 = \frac{216}{625} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(5) B 社と C 社に申し込み，1 社から先に通知が届いた．その通知が当選である確率は（通知が来るタイミングとその当選か否かとは無関係なので）

$$\begin{aligned} & Q(B) \cdot P_B(T) + Q(C) \cdot P_C(T) \\ = \ & 0.4 \times 0.3 + 0.6 \times 0.2 \\ = \ & 0.24 = \frac{6}{25} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(6) (5) において，B 社からの当選通知である確率は

$$\begin{aligned} & \frac{Q(B) \cdot P_B(T)}{Q(B) \cdot P_B(T) + Q(C) \cdot P_C(T)} \\ = \ & \frac{0.4 \times 0.3}{0.4 \times 0.3 + 0.6 \times 0.2} \\ = \ & 0.5 = \frac{1}{2} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$