「解答例」

選抜区分	2022 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　　（科目名：数学）

問題１

(1) $a_1 - a_2 = 2(1+1)a_1a_2$ であるから,

$$\frac{1}{2} - a_2 = 2(1+1)\frac{1}{2}a_2$$

より, $3a_2 = \frac{1}{2}$ よって, $a_2 = \frac{1}{6}$ である. $\cdots$ (答)

同様に,

$$\frac{1}{6} - a_3 = 2(2+1)\frac{1}{6}a_3$$

より, $2a_2 = \frac{1}{6}$ よって, $a_3 = \frac{1}{12}$ である. $\cdots$ (答)

(2) $n=1$ のとき, 条件より $a_1 > 0$ である.
$n=k$ のとき, $a_k > 0$ を仮定すると, $a_k - a_{k+1} = 2(k+1)a_ka_{k+1}$ であるから, これを変形すると,

$$a_k = (2(k+1)a_k + 1)a_{k+1}$$

である. $a_k > 0, k > 0$ であるので, $2(k+1)a_k + 1 > 0$ であることから, $a_{k+1} > 0$ である. 以上より, すべての自然数 n に対して, $a_n > 0$ である.

(3)

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)a_n + 1}$$

であるから,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2(n+1)a_n + 1}{a_n} = 2(n+1) + \frac{1}{a_n}$$

よって, $n \geqq 2$ のとき,

$$b_{n+1} - b_n = 2(n+1)$$

が成り立つ. これから,

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = 2 + n(n-1) + 2(n-1) = n(n+1)$$

である. これは, $n=1$ のときも成り立つ.

(4)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

である. $\cdots$ (答)

(5) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ であるから,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = \left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

である. $\cdots$ (答)

問題2

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + b$ とおく.

$$f'(x) = x^2 - 2ax = x(x - 2a)$$

により、$x = 0$ 或いは $x = 2a > 0$ のとき, $f'(x) = 0$ となる.

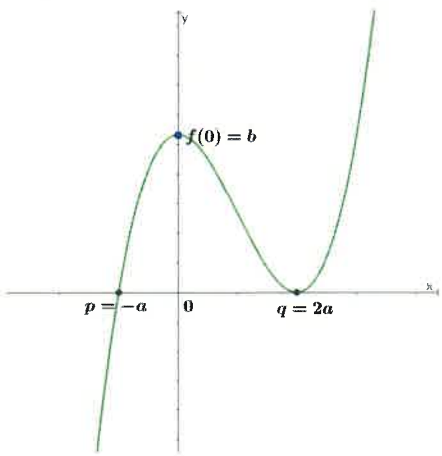
$f(x)$ の増減表は下のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $f(x)$ の極大値が $f(0)$, 極小値が $f(2a)$ である.$f(x) = 0$ について, 2 個の異なる実数解を持つため, 極値の積 $f(0)f(2a) = 0$ となる. そのなか, 極大値 $f(0) = b > 0$ のため, 極小値 $f(2a) = 0$ となる.

$$f(2a) = -\frac{4a^3}{3} + b = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{4a^3}{3}$$

(2) $f(x)$ のグラフは下のようになる.



$f(p) = f(q) = 0$, かつ $p < q$ のため, $q = 2a$ となる.$b = \dfrac{4a^3}{3}$ を $f(x) = \dfrac{1}{3}(x-p)(x-q)^2$ に代入すると,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + \frac{4a^3}{3} = \frac{1}{3}(x - 2a)^2(x - p)$$

となる. そのなか, 定数項について

$$\frac{4a^3}{3} = -\frac{4a^2}{3}p \qquad \Longrightarrow \qquad p = -a$$

となる. したがって, $p = -a$, $q = 2a$ である.

(3) 面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_p^q f(x)dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-a}^{2a}(x-2a)^2(x+a)dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-a}^{2a}(x-2a)^2[(x-2a)+3a]dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-a}^{2a}[(x-2a)^3+3a(x-2a)^2]dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{(x-2a)^4}{4}+3a\frac{(x-2a)^3}{3}\right]_{-a}^{2a} \\
&= \frac{1}{3}\left[-\frac{(3a)^4}{4}+\frac{(3a)^4}{3}\right] \\
&= \frac{9a^4}{4}
\end{aligned}
$$

(4) 直線 l と曲線 C_1 の交点が $P(p, ap^2)$ と $R(r, ar^2)$ の 2 点である. 上記（2）の結果より, $p=-a$ である.

(i) $r>p$ のとき

直線 l と曲線 C_1 で囲まれた面積 T は

$$T=\frac{1}{6}a(r-p)^3=\frac{1}{6}a(a+r)^3$$

となるから, (3) の結果より,

$$\frac{1}{6}a(a+r)^3=\frac{9}{16}a^4$$

すなわち

$$(a+r)^3=\left(\frac{3}{2}a\right)^3$$

となる. よって, $a>0, a+r>0$ より, $r=\frac{a}{2}$ となり, $R(\frac{a}{2}, \frac{a^3}{4})$ となる.

したがってこのとき, $m=-\frac{a^2}{2}$,$n=\frac{a^3}{2}$, すなわち, 直線 $l: y=-\frac{a^2}{2}x+\frac{a^3}{2}$ となる.

(ii) $r<p$ のとき

直線 l と曲線 C_1 で囲まれた面積 T は

$$T=\frac{1}{6}a(p-r)^3=-\frac{1}{6}a(a+r)^3$$

となるから, (3) の結果より,

$$(a+r)^3+\left(\frac{3}{2}a\right)^3=0$$

となる. この式より,

$$\left((a+r)+\frac{3}{2}a\right)\left((a+r)^2-(a+r)\cdot\frac{3}{2}a+\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right)=0$$

となるが, $(a+r)^2 \geqq 0$, $-(a+r)\cdot\frac{3}{2}a>0$, $\left(\frac{3}{2}a\right)^2>0$ であるので, $r=-\frac{5}{2}a$ となり, $R(-\frac{5}{2}a, \frac{25}{4}a^3)$ となる. したがってこのとき, $m=-\frac{7}{2}a^2$,$n=-\frac{5}{2}a^3$, すなわち, 直線 $l: y=-\frac{7}{2}a^2x-\frac{5}{2}a^3$ となる.

以上 (i), (ii) より, $(m,n)=(-\frac{a^2}{2}, \frac{a^3}{2}), (-\frac{7}{2}a^2, -\frac{5}{2}a^3)$.

問題3

まず, 以下が成立していることを踏まえて解答を書く.

(F1) PA'=PA= $a\sin\theta$, A'D=AD= $a\cos\theta$.

(F2) ∠A'PD=∠APD= $90^\circ-\theta$, ∠BPA'= $180^\circ-2(90^\circ-\theta)=2\theta$.

(1) 求める辺の長さを $l_{AA'}$ とおく. 直角三角形PA'Dとそれと合同な直角三角形PADから成る四角形PA'DAの外接円の直径は辺PD=aである. この外接円に△AA'Dは内接することから, 正弦定理を適用し以下を得る.

$$\frac{l_{AA'}}{\sin 30^\circ}=a.$$

よって $l_{AA'}=\dfrac{a}{2}$.

(2) (F1) と与式から $a(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$ より, $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. これの両辺を2乗すると, $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ が成り立つので $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$ を得る. 次に△AA'Dの面積 S_2 はA'D=AD= $a\cos\theta$ を用いてのように表せる.

$$S_2=\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta\sin 2\theta=\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta(2\sin\theta\cos\theta)$$

上で求めた $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$ を代入することで $S_2=\dfrac{a^2\cos^2\theta}{8}$ となる. 一方, 正方形ABCDの面積は辺A'D=辺AD= $a\cos\theta$ を用いて $S_1=a^2\cos^2\theta$ と表せる. したがって, 求める面積比は $\frac{S_1}{S_2}=8$.

(3) $\tan\theta=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{2}-1$. ここで $\cos\theta>0$ (なぜなら $0<\theta<45^\circ$) より,

$$\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta-\cos\theta\Leftrightarrow a\sin\theta+a\cos\theta=\sqrt{2}a\cos\theta.$$

この式の右辺は正方形ABCDの対角線BDの長さに対応し, 左辺の第2項目は辺A$'$Dの長さに対応している. $a\sin\theta$=辺A$'$P=辺A$'$Bが成立するとき, つまり点A$'$が対角線BD上に位置するときにこの式は成立する. よってこの時 ∠A'DA= $2\theta=45^\circ(\theta=22.5^\circ)$ が成り立つ. $S_1=a^2\cos^2 22.5^\circ$, $S_2=\frac{a^2\cos^2 22.5^\circ\sin 45^\circ}{2}$ より求める面積比は $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

(4) 辺A$'$D=辺AD=$a\cos\theta$, その間の角 2θ より $S_2=\dfrac{a^2\cos^2\theta\sin 2\theta}{2}$, また, 辺A$'$D=辺DC=$a\cos\theta$, その間の角 $90^\circ-2\theta$ より $S_3=\dfrac{a^2\cos^2\theta\sin(90^\circ-2\theta)}{2}=\dfrac{a^2\cos^2\theta\cos 2\theta}{2}$ と表せるので

$$\frac{S_2}{S_3}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta.$$

倍角の定理を用いて $\dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$. ここで, $0<\tan\theta<1$ $(0<\theta<45^\circ)$ より $1-\tan^2\theta>0$ を満たす.

(5) 辺A'Cの長さを $l_{A'C}$ とおくと, 余弦定理より

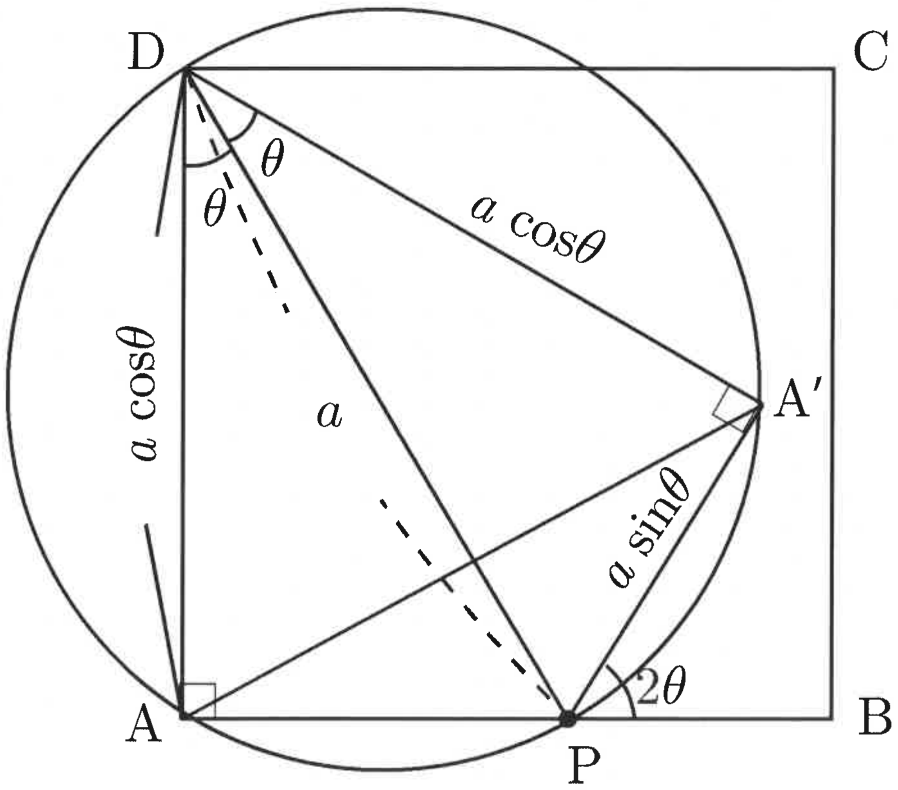
$$\begin{aligned}(l_{A'C})^2&=a^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\theta-2a^2\cos^2\theta\cos(90^\circ-2\theta)=2a^2\cos^2\theta-2a^2\cos^2\theta\sin 2\theta\\&=2a^2\cos^2\theta(1-2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

$l_{AA'} = a\sin 2\theta = 2a\sin\theta\cos\theta$ より $(l_{AA'})^2 = 4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta$. よって,

$$\left(\frac{l_{A'C}}{l_{AA'}}\right)^2 = \frac{2a^2\cos^2\theta(1-2\sin\theta\cos\theta)}{4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tan\theta}\right)^2.$$

ここで $0 < \tan\theta < 1$ $(0 < \theta < 45^\circ)$, そして $\dfrac{l_{A'C}}{l_{AA'}} > 0$ より $\dfrac{l_{A'C}}{l_{AA'}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\tan\theta}-1\right)$.

次に $k = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ((4) で求めた) より $k\tan^2\theta + 2\tan\theta - k = 0$. $0 < \tan\theta < 1$ より $\tan\theta = \dfrac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$. これを $\dfrac{l_{A'C}}{l_{AA'}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\tan\theta}-1\right)$ に代入すると, 求める辺の比は $\dfrac{l_{A'C}}{l_{AA'}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}-1}-1\right)$.



問題 4

(1) 2 の指数と 3 の指数の選び方の数だけあるから，lm となる．

(2) 集合 $A(10, 11, 1)$ の要素の数は，前問より 110 ある．また，そのうち 6 の倍数は，$9 \times 10 = 90$ だけあるから，求める確率は，

$$\frac{90}{110} = \frac{9}{11}.$$

(3) 集合 $A(3, 4, 3)$ に含まれる要素をすべて書き出すと，

$$\left\{\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, \frac{9}{2}, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\right\}$$

となり，要素の数は 24 となる．

(4) 集合 $A(3, 4, 5)$ に含まれる要素をすべて書き出すと，

$$\left\{\frac{1}{1296}, \frac{1}{648}, \frac{1}{432}, \frac{1}{324}, \frac{1}{216}, \frac{1}{144}, \frac{1}{108}, \frac{1}{72}, \frac{1}{54}, \frac{1}{48}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, \frac{9}{2}, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\right\}$$

となり，要素の数は 36 となる．

(5) 集合 $A(3,4,1), A(3,4,2), A(3,4,4), A(3,4,6)$ に含まれる要素をすべて書き出すと，それぞれ

$$\{1,2,3,4,6,9,12,18,27,36,54,108\},$$
$$\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,3,4,\frac{9}{2},6,9,12,18,27,36,54,108\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{216},\frac{1}{108},\frac{1}{72},\frac{1}{54},\frac{1}{36},\frac{1}{24},\frac{1}{18},\frac{1}{12},\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{3}{2},2,3,4,\frac{9}{2},6,9,12,\right.$$
$$\left.18,27,36,54,108\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{7776},\frac{1}{3888},\frac{1}{2592},\frac{1}{1944},\frac{1}{1296},\frac{1}{864},\frac{1}{648},\frac{1}{432},\frac{1}{324},\frac{1}{288},\frac{1}{216},\frac{1}{144},\frac{1}{108},\frac{1}{72},\frac{1}{54},\right.$$
$$\left.\frac{1}{48},\frac{1}{36},\frac{1}{24},\frac{1}{18},\frac{1}{12},\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{3}{2},2,3,4,\frac{9}{2},6,9,12,18,27,36,54,108\right\}$$

となり，要素の数は，順に $12, 18, 30, 42$ となる．$A(3,4,1), A(3,4,2), A(3,4,3), A(3,4,4), A(3,4,5), A(3,4,6)$ の自然数の要素の数はすべて 12 だから，求める確率は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{12}{12}+\frac{1}{6}\times\frac{12}{18}+\frac{1}{6}\times\frac{12}{24}+\frac{1}{6}\times\frac{12}{30}+\frac{1}{6}\times\frac{12}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{12}{42}=\frac{223}{420}.$$

（注）一般に，集合 $A(l,m,n)$ において，l,m を固定し n を 1 ずつ増やしたとき，その要素は $lm-(l-1)(m-1)=l+m-1$ ずつ増える．

(6) 事象 α, β をそれぞれ以下のように定める．

α　操作を行ったとき，取り出した要素が自然数である事象

β　さいころを振ったとき，目 d が 5 である事象

$$P(\alpha\cap\beta)=\frac{1}{6}\times\frac{12}{36}=\frac{1}{18},\qquad P(\alpha)=\frac{223}{420}$$

だから，求める確率は

$$P_\alpha(\beta)=\frac{P(\alpha\cap\beta)}{P(\alpha)}=\frac{70}{669}.$$